

仿射子空间最近点分类算法

周晓飞 姜文瀚 杨静宇

(南京理工大学计算机科学与技术学院, 南京 210094)

摘要 为了取得更好的识别效果,受支持向量机的几何解释和最近点问题启发,提出了一种新的模式分类算法——仿射子空间最近点算法。该算法是将支持向量机最近点法的最近点搜索区域由两类训练集凸包推广到两类训练样本各自张成的仿射子空间,并以仿射子空间作为样本分布的粗略估计,通过仿射子空间中的最近点对来构造平分仿射子空间间隔的最优分类超平面。该算法在 ORL 人脸识别数据库上进行的比较实验中取得了较好的识别效果,从而证实了该方法的可行性和有效性。

关键词 仿射子空间 支持向量机 仿射子空间最近点 模式分类 人脸识别

中图分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2008)08-1506-05

Affine Subspace Nearest Points Classification Algorithm

ZHOU Xiao-fei, JIANG Wen-han, YANG Jing-yu

(Department of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology of China, Nanjing 210094)

Abstract A novel pattern classification algorithm called Affine subspace Nearest Points (ASNP) algorithm is presented in this paper. Inspired by the geometrical explanation of Support Vector Machine (SVM) and the nearest point method, in which the optimal separating plane bisects the closest points within two convex hulls, the ASNP algorithm expands the searching areas of the closest points from the convex hulls to their corresponding class affine subspaces. The affine subspaces are taken as the rough estimations of the class sample distributions, and their closest points are found. Then, the hyperplane to separate the affine subspaces with the maximal margins is constructed, which is the perpendicular bisector of the line segment joining the two closest points. The test experiments compared with the Nearest Neighbor (1-NN) classifier and SVM on the ORL face recognition database showed good performance of this algorithm.

Keywords affine subspace, support vector machines (SVM), affine subspace nearest point, pattern classification, face recognition

1 引言

众所周知,支持向量机分类算法的基本原理是要构造一个最优分类超平面,以求使其两侧训练集中的点到分类面的最小距离(间隔)最大^[1]。最优分类超平面实际上就是一个以两类训练样本凸包最近点的连线方向为法向量,且过最近点连线中点的超平面^[2-4]。通过对支持向量机的几何解释进行的

分析,笔者认为,支持向量机的分类过程就是隐含地将训练集扩展为各类别样本凸包,并以凸包作为样本分布的参照模型来构造最大间隔分离凸包的分类超平面的过程。在实际应用中的许多高维自然数据往往都分布在高维空间的低维流形上,而比较简单直观的低维流形就是训练样本所在的最小线性流形——仿射子空间。本文将训练集扩展为由各类别样本生成的仿射子空间,并以每类训练样本张成的仿射子空间作为相应类别样本分布的粗略估计。与

基金项目:国家自然科学基金项目(60472060,60632050)

收稿日期:2006-10-09;改回日期:2007-03-26

第一作者简介:周晓飞(1978~),女。现为南京理工大学计算机科学与技术学院博士研究生。主要研究方向为人工智能与模式识别。

E-mail: zhouxf@njust.edu.cn

支持向量机(SVM)的最近点算法相似,即先在仿射子空间上寻找最近点对,然后构造最大间隔分离仿射子空间的分类超平面。

笔者在 ORL 人脸识别数据库上,将本文提出的仿射子空间最近点算法同支持向量机和最近邻分类器进行了比较实验,取得了较好的实验效果,从而证实了本文由仿射子空间来预测样本分布,并平分仿射子空间间隔的分类方法在实际应用中是可行的和有效的。

2 支持向量机几何解释

支持向量机的分类原理就是要构造一个最优分类超平面,以求使它两侧训练集中的样本到分类面的最小距离(间隔)最大。而实质上,所谓的最优分类超平面就是垂直平分两类训练样本凸包最近点对连线的超平面。业已证明支持向量机的最大间隔问题与求凸包最近点对问题是等效的^[2-4]。如图 1 所示,现以 2 维空间样本为例来说明支持向量机的几何本质。图 1 中的凸包边缘用虚线表示, \mathbf{H} 是最优分类超平面。

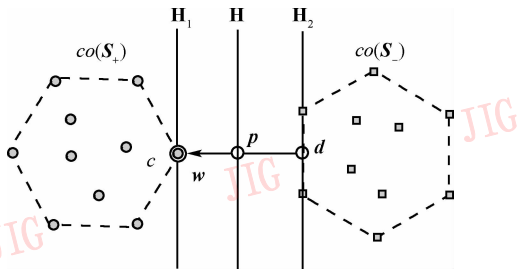


图 1 支持向量机的几何解释

Fig. 1 The geometrical explanation of SVM

由于支持向量机算法所要寻找的最佳投影方向 \mathbf{w} 正是两类样本凸包最近点对(图 1 中 \mathbf{c}, \mathbf{d})的连线方向,所以,支持向量机中所谓的最大间隔(如图 1 中支撑面 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 间的距离 $2/\|\mathbf{w}\|$)就是凸包间隔(最近点 \mathbf{c}, \mathbf{d} 间的距离)。这样直接平分凸包间隔就可构造最优分类超平面。

假设给定线性可分的正负两类问题的训练样本为 $(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_l, y_l)$, $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n$, $y_i \in \{+1, -1\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, y_i 表示类别标识,那么两类训练样本点集分别为 $\mathbf{S}_+ = \{\mathbf{x}_i | y_i = +1\}$, $\mathbf{S}_- = \{\mathbf{x}_i | y_i = -1\}$ 。 \mathbf{S}_+ 和 \mathbf{S}_- 的凸包 $co(\mathbf{S}_+)$ 和 $co(\mathbf{S}_-)$ 分别为包含各自类别样本的最小凸集,即分别是 \mathbf{S}_+ 和 \mathbf{S}_- 中由所有样本凸组合构成的集合,即

$$co(\mathbf{S}_+) = \left\{ \sum_{y_i=+1} \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \sum_{y_i=+1} \alpha_i = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

$$co(\mathbf{S}_-) = \left\{ \sum_{y_i=-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \sum_{y_i=-1} \alpha_i = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\} \quad (1)$$

当 \mathbf{S}_+ 和 \mathbf{S}_- 可分时,则 $co(\mathbf{S}_+)$ 和 $co(\mathbf{S}_-)$ 不相交^[4]。此时求解两个凸包上最近点对的优化问题为

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & \frac{1}{2} \left\| \sum_{y_i=+1} \alpha_i \mathbf{x}_i - \sum_{y_i=-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \right\|^2 \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{y_i=+1} \alpha_i = 1, \quad \sum_{y_i=-1} \alpha_i = 1 \\ & 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)^T$ 。

式(2)为凸二次规划问题,假设通过优化求得的最优解为 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_l^*)^T$,那么两类凸包的最近点对为

$$\mathbf{c} = \sum_{y_i=+1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{d} = \sum_{y_i=-1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i \quad (3)$$

然后即可构造垂直平分线段 \overrightarrow{dc} 的分类超平面 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$,其中法向量 \mathbf{w} 为 $\mathbf{w} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$ 。由于该超平面过最近点连线的中点 $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d})$,因此 $b = -\mathbf{w} \cdot \mathbf{p} = -\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})$ 。相应求得的支持向量机决策函数为 $f(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b)$,其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 是符号函数。

从支持向量机的最近点方法可以看到,支持向量机以最大间隔分离训练样本为目的来构造最优分类超平面,实际上也最大间隔地分离了两类样本的凸包。显然,凸包形象地表达了样本分布的大致区域,且最优分类超平面给予两侧凸包相同的冗余间隔。对于实际应用中的高维自然数据,它们往往都分布在高维空间的低维流形上,最简单的低维流形就是训练样本所在的最小维数的线性流形——仿射子空间。本文将由各类别训练样本所生成的仿射子空间作为样本分布的预测模型来替代凸包,并在仿射子空间中通过寻找最近点来构造平分仿射子空间间隔的分类超平面。本文称这一分类算法为仿射子空间最近点分类算法。以下将详细介绍本文的这一方法。

3 仿射子空间最近点分类算法

仿射子空间最近点算法受支持向量机的几何解释启发,将支持向量机最近点问题中的最近点搜索

区域由凸包推广到仿射子空间(仿射超平面),以平分两类训练集仿射子空间的间隔为目的来构造线性分类超平面。

对于一类训练集 $S \subset \mathbf{R}^n$, $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$, 由 S 张成的仿射子空间为 S 所在的最小维数超平面, 即包含 S 的最小线性流形^[5]:

$$H(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\} \quad (4)$$

如果 S 中第 k 个样本(不为零向量)的秩为 m , 则 k 个向量张成的仿射子空间的维数为 $m - 1$ 。仿射子空间只与样本分布有关, 而与空间中原点定义无关。

假设给定正负两类问题的训练样本 (\mathbf{x}_1, y_1) , $(\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_l, y_l)$, $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n$, $y_i \in \{+1, -1\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, y_i 表示类别标识, 则两类训练样本点集分别为 $S_+ = \{\mathbf{x}_i \mid y_i = +1\}$ 和 $S_- = \{\mathbf{x}_i \mid y_i = -1\}$ 。由 S_+ 和 S_- 各自样本张成的仿射子空间为

$$\begin{aligned} H(S_+) &= \left\{ \sum_{y_i=+1} \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \sum_{y_i=+1} \alpha_i = 1 \right\} \\ H(S_-) &= \left\{ \sum_{y_i=-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \mid \sum_{y_i=-1} \alpha_i = 1 \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

同样假定 $H(S_+)$ 和 $H(S_-)$ 不相交, 则求解 $H(S_+)$ 和 $H(S_-)$ 上的最近点对问题为

$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & \frac{1}{2} \left\| \sum_{y_i=+1} \alpha_i \mathbf{x}_i - \sum_{y_i=-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \right\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{y_i=+1} \alpha_i = 1, \sum_{y_i=-1} \alpha_i = 1, \quad i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)^T$ 。

优化问题(式(6))由于没有 $0 \leq \alpha_i \leq 1$ 约束, 显然较支持向量机的最近点求解的优化问题(式(2))要简单得多。

假设式(6)的最优解 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_l^*)^T$, 同样, 两个仿射子空间的最近点对为

$$\mathbf{c} = \sum_{y_i=+1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{d} = \sum_{y_i=-1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i \quad (7)$$

最近点连线的中点为

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{y_i=+1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i + \sum_{y_i=-1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \alpha_i^* \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (8)$$

则构造的垂直平分最近点对线段 \vec{dc} 的分类超平面为 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0$, 其中

$$\mathbf{w} = \mathbf{c} - \mathbf{d} = \sum_{y_i=+1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i - \sum_{y_i=-1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i = \sum_{y=1}^l y_i \alpha_i^* \mathbf{x}_i \quad (9)$$

由于分类超平面过点 \mathbf{p} , 有 $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} b &= -\mathbf{w} \cdot \mathbf{p} = -\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i \alpha_i^* \alpha_j^* (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (10)$$

从而可得如下分类判决函数:

$$f(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b) = \text{sgn} \left(\sum_{i=1}^l y_i \alpha_i^* (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}) - \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l y_i \alpha_i^* \alpha_j^* (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \right\} \right) \quad (11)$$

以下是本文仿射子空间最近点分类算法的流程:

算法 1(仿射子空间的最近点分类算法):

①初始化正负两类训练样本数据集 $\{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_l, y_l)\}$, $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n$, $y_i \in \{+1, -1\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, y_i 表示类别标识。

②求解以下两个仿射子空间最近点对的优化问题:

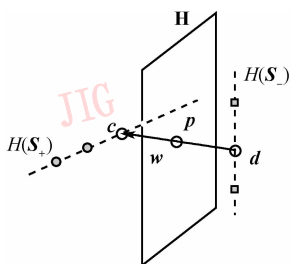
$$\begin{aligned} \min_{\alpha} \quad & \frac{1}{2} \left\| \sum_{y_i=+1} \alpha_i \mathbf{x}_i - \sum_{y_i=-1} \alpha_i \mathbf{x}_i \right\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{y_i=+1} \alpha_i = 1, \sum_{y_i=-1} \alpha_i = 1, \quad i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

③通过解向量 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_l^*)^T$, 即可求得最近点对 \mathbf{c} 和 \mathbf{d} : $\mathbf{c} = \sum_{y_i=+1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i$, $\mathbf{d} = \sum_{y_i=-1} \alpha_i^* \mathbf{x}_i$ 。

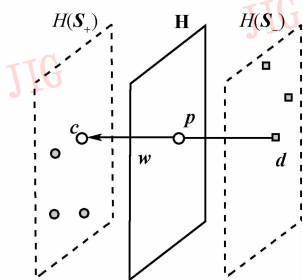
④由最近点对 \mathbf{c} 和 \mathbf{d} , 即可求得分类面的法向量 $\mathbf{w} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$ 和偏置 $b = -\frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})$ 。

⑤构造以下分类判别函数: $f(\mathbf{x}) = \text{sgn}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b)$ 。对于测试样本 \mathbf{x} , 若 $f(\mathbf{x}) \geq 0$, 则 \mathbf{x} 属于正类; 若 $f(\mathbf{x}) < 0$, 则 \mathbf{x} 属于负类。

接下来, 以图 2 示例来说明仿射子空间最近点分类算法的分类原理。其中图 2(a)为两类均有 2 个训练样本时的情况, 两类样本各自张成的仿射子空间均为直线。图 2(b)为每类有 3 个仿射无关样本时的情况, 两类样本各自张成的仿射子空间均为 2 维平面。图中虚线部分 $H(S_+)$ 和 $H(S_-)$ 分别表示两类样本生成的仿射子空间, \mathbf{c} 和 \mathbf{d} 为两个仿射子空间中的最近点对, \mathbf{p} 为最近点连线的中点, \mathbf{H} 为过点 \mathbf{p} , 且法向量为 \vec{dc} 的分类面。图 2 中的最近点 \mathbf{c}, \mathbf{d} 间的距离就是两个仿射子空间之间的距离, 本文将这个距离作为仿射子空间之间的间隔。这种由仿射子空间最近点分类算法所构造的分类超平面 \mathbf{H} 平分的仿射子空间间隔, 即使两个仿射子空间到分类面的距离相等。当然, 该分类算法的适用条件就是两个仿射子空间不



(a)每类2个训练样本



(b)每类3个训练样本

图 2 仿射子空间最近点分类算法决策界示意图

Fig. 2 The decisions of affine subspace nearest points algorithm

相交,否则就无法求解 w 。这与支持向量机最近点方法的针对凸包不相交的情况类似。

本文提出的仿射子空间最近点分类算法与支持向量机最近点方法相比较,其不同之处在于最近点的搜索区域是仿射子空间,而不是凸包。但在求得最近点对后,两算法具有相同的分类器构造过程,都是以垂直平分最近点间线段的超平面作为决策界。同样以图 2(b)中的样本为例,由支持向量机最近点原理构造的分类超平面即图 3 中的 H_1 。

比较图 2(b)和图 3 可以清晰地看到本文算法与支持向量机的分类原理不同,本文算法的分类超平面是垂直样本生成的仿射子空间最近点连线,而支持向量机的最优分类超平面则是垂直于样本凸包的最近点连线;本文算法平分两个仿射子空间间隔,而支持向量机则平分两个凸包间隔。

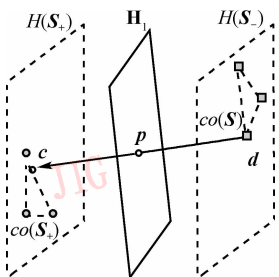


图 3 SVM 决策界示意图

Fig. 3 The decision of SVM

针对多类问题,可以采用自底向上的二叉树结构方法^[6]将其转化为多个两类问题来解决,而每一个两类仿射子空间最近点分类器则作为树的判别节点。

4 人脸识别应用及实验分析

本文选择 AT&T 剑桥实验室的 ORL 标准人脸图像库 (<http://www.cl.cam.ac.uk/Research/DTG/attarchive/facedatabase.html>) 进行了实验测试。ORL 标准人脸库由 40 个人的 400 幅灰度图像构成。其中,每人 10 幅图像,分别用自然数 1,2,⋯,10 标识。图像格式为 PGM,分辨率是 92 × 112。该库中的人脸图像摄于不同时期,具有光照、表情(如睁眼、闭眼、微笑、不笑)、细节(如戴眼镜、不戴眼镜)、姿态(深度旋转和平面旋转可达 20°)和尺度等的变化。图 4 为 ORL 标准人脸库中的一类人脸例图(缩小)。实验时,将该库所有人脸图像经过双三次插值压缩为 16 × 16 大小,并按列向拉伸为 1 维向量,作为实验样本。



图 4 ORL 人脸库图像

Fig. 4 Face images from ORL face database

为验证本文算法的有效性,笔者将本文的仿射子空间最近点分类算法(ASNP)同最近邻分类器(1-NN)和支持向量机的分类结果进行了比较,共进行了 10 组实验。每组实验的训练集均由 200 幅图像构成,每人 5 幅。其余的 200 幅用于测试。10 组实验训练集的选取方法是:将各类的 10 幅图像按标识顺序排序,并首尾衔接,即 1,2,⋯,10,1,⋯。第 i 组训练集从标识为“ i ”的样本起,顺次取 5 个样本, $i=1,⋯,10$ 。10 组训练集相应标识为 {1,2,3,4,5}, {2,3,4,5,6}, ⋯, {6,7,8,9,10}, {7,8,9,10,1}, {8,9,10,1,2}, ⋯, {10,1,2,3,4}。

实验中,SVM 选取的核函数分别为线性

(linear)核函数 $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, 二次多项式(quad)核函数 $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}))^2$ 和径向基(rbf)核函数 $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp(-0.5 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/\sigma)^2$, $\sigma = 6$ 。各支持向量机的惩罚系数取 ∞ 。而支持向量机的优化求解则通过 Matlab 优化工具箱来实现。此外,实验还采用了自底向上的二叉树结构方法^[6],用以解决支持向量机和本文方法的多类识别问题。10 组不同算法的识别率实验比较结果和平均识别率(各分类器的 10 个识别率的平均值)见表 1。

表 1 ORL 人脸库的实验结果

Tab. 1 Results of experiments on ORL face database

训练样本	不同算法的识别率(%)				ASNP
	1-NN	SVM (linear)	SVM (quad)	SVM (rbf)	
1,2,3,4,5	92.00	91.50	91.00	91.50	93.50
2,3,4,5,6	95.00	95.00	95.00	95.00	95.00
3,4,5,6,7	96.00	95.50	95.50	95.50	96.00
4,5,6,7,8	93.50	97.00	96.00	97.00	97.00
5,6,7,8,9	93.00	97.50	97.50	97.50	98.00
6,7,8,9,10	92.50	93.00	92.00	93.00	95.00
7,8,9,10,1,	96.00	97.50	97.00	97.50	98.50
8,9,10,1,2	96.50	97.50	98.00	97.50	98.00
9,10,1,2,3	94.50	97.00	98.50	97.00	98.00
10,1,2,3,4	94.00	97.00	97.00	97.00	97.50
平均识别率(%)	94.30	95.85	95.75	95.85	96.65

注:实验数据表示正确识别率(正确识别样本数/测试样本总数 \times 100%),黑体标出的数据为各组实验的最高识别率。

就以上的实验结果来说,在各分类算法中,本文算法具有最好的识别效果。10 组实验中,本文算法除有 1 组实验的识别率略低于 SVM(quad)算法外,其余 9 组实验均取得了最高的识别率。SVM(quad)算法有 3 组实验的识别率达到最高。1-NN 分类器, SVM(linear)算法和 SVM(rbf)算法分别都有 2 组实验的识别率达到最高。另外,从实验的平均识别率来看,本文算法也取得了最高的识别率(96.65%),其次为 SVM 算法,其在采用线性核和径向基核的情

况下,平均识别率为 95.85%,二次多项式核的 SVM 算法的平均识别率为 95.75%。1-NN 分类器的平均识别率最低,为 94.30%。显而易见,本文方法具有较为突出的识别准确率优势,从而证实了该方法的可行性和有效性。

5 结 论

本文提出的仿射子空间最近点算法受支持向量机的几何解释启发,将支持向量机最近点法中的最近点搜索区域由两类训练样本凸包推广到样本所生成的仿射子空间,并以分离仿射子空间为目的来构造垂直平分最近点间连线的分类超平面。该算法以各类训练样本生成的仿射子空间作为相应类的样本分布估计。ORL 人脸识别数据库上的比较实验结果显示,本文算法取得了较好的识别效果,就证实了该方法是可行的和有效的。

参考文献 (References)

- 1 Vapnik V N. The Nature of Statistical Learning Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.
- 2 Bennett K P, Bredensteiner E J. Duality and geometry in SVM classifiers[A]. In: Langley P, editor: Proceedings of the 17th International Conference on Machine Learning[C], San Francisco, California, USA: Morgan Kaufmann, 2000: 57 ~ 64.
- 3 Keerthi S S, Shevade S K, Bhattacharyya C, et al. A fast iterative nearest point algorithm for support vector machine classifier design [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2000, 11(1): 124 ~ 136.
- 4 Deng Nai-yang, Tian Ying-jie. A New Approach in Data Mine-Support Vector Machine[M], Beijing: Academic Press, 2004. [邓乃扬, 田英杰著, 数据挖掘中的新方法—支持向量机 [M], 北京: 科学出版社, 2004.]
- 5 Wang Ri-shuang. Functional Analysis and Optimization Theory [M]. Beijing: Bei Hang Press, 2003. [王日爽编著. 泛函分析与优化理论[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2003.]
- 6 Guo G, Li S Z, Chan, K L. Face recognition by support vector machines [A]. In: Proceedings of the Fourth IEEE International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition [C], Grenoble, France, 2000: 196 ~ 201.